Compendio de evaluaciones del ciclo 2012-0
Equipo de MATEMÁTICA II ciclo 2012-0

[1]

Curso: Matemáticas II

Calificada 1

Viernes 13 de Enero de 2012

---

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos tal que $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   a) Demuestre que la sucesión es monótona.
   Solución. En efecto, como $\frac{1}{4} < 1$
   $$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n < a_n$$
   esto implica que la sucesión es estrictamente decreciente.

   b) Pruebe que la sucesión es acotada.
   Solución. Como la sucesión es decreciente entonces es acotada superiormente por el primer término: 2. Como los términos son positivos la sucesión esta acotada inferiormente por el número cero.

   c) Por el Axioma de Completitud la sucesión es convergente. Calcule el límite.

   Solución. Si el límite existe entonces $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ implica que
   $$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{L}{4}$$
   de donde $L = 0$.

2. *a*) De la definición formal del límite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   Solución. Para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{R}$ tal que si $x < N$ entonces $f(x) > M$.

   b) Use la definición anterior para demostrar que $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$.

   Solución. Es necesario que $-x^3 > M$, lo cual es equivalente a $x^3 < -M$ o $x < (-M)^{\frac{1}{3}}$. Entonces es suficiente tomar $N = (-M)^{\frac{1}{3}}$.

3. Calcule los siguientes límites o explique por qué no existen.

   a) $$\lim_{n\to\infty} \ln(n)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\ln(n^2)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln(n^2)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\ln(n^2)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\ln(n^2)}\right)}{\left(\frac{1}{\ln(n^2)}\right)} = \frac{1}{2}$$

   b) $$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-81} = \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(x+9)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{3}-3)} = \lim_{x\to 9}\frac{1}{(x+9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{108}$$

   c) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-x} = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{-z-1}{-z+1}\right)^{z} = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{-z-1}{-z+1}\right)^{z} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2}{z-1}\right)^{(z-1)+1} = e^2$$

   d) $$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ donde } f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x^2-1} & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ \frac{1}{|x-3|} & x > 1 \end{cases}$$
   Este límite no existe. Para ello mostramos que los límites laterales son diferentes. En efecto,
   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$$

y sin embargo

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}$$

4. El costo de producir p unidades de cierto producto es $C(p)$ miles de soles. Se sabe que cuando el número de unidades producidas aumenta indefinidamente el costo se aproxima a la función lineal $Ap+B$ donde A, B son constantes positivas.

   a) Verifique que el costo promedio (costo por unidad) converge cuando el número de unidades producidas aumenta indefinidamente.
   Solución. Por hipótesis se tiene que

   $$\lim_{p\to+\infty} C(p) - (Ap+B) = 0$$

   es decir, $Ap+B$ es una asíntota oblicua. Pero entonces

   $$0 = \lim_{p\to+\infty} \frac{C(p)-(Ap+B)}{p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{C(p)}{p} - A + \frac{B}{p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{C(p)}{p} - A \quad \Rightarrow \quad \lim_{p\to+\infty} \frac{C(p)}{p} = A.$$

   b) Se estima que para que las ventas sean rentables el costo promedio del producto no debe superar los $A+B$ miles de soles. Demuestre que en este caso a partir de cierto número de unidades podemos garantizar la rentabilidad de las ventas.
   Solución. Por la definición formal de límite al infinito, tomando $\epsilon = B$ vemos que existe un N tal que $p > N$ implica

   $$|\frac{C(p)}{p} - A| < B \quad \Leftrightarrow \quad -B < \frac{C(p)}{p} - A < B$$

   y sumando A obtenemos $\dfrac{C(p)}{p} < A+B$.

5. Considere dos funciones continuas $f, g : [0;10] \to \mathbb{R}$ que representan la oferta y demanda respectivamente de un producto, verificándose lo siguiente:

   a) $g(0) = 8$ y $g(10) = 1$.
   b) $f(x) = e^x + 1$.

   Demuestre la existencia de un punto $x_0 \in]0;10[$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$. El punto x_0 es llamado punto de equilibrio entre la oferta y la demanda.

   Solución. Considere la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Asi, h es continua por el álgebra de funciones continuas. Como $h(0) = -6 < 0$ y $h(10) = e^{10} > 0$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio existe un punto $x_0 \in]0;10[$ tal que $h(x_0) = 0$, es decir $f(x_0) = g(x_0)$

Curso: Matemáticas II

Calificada 2

Viernes 20 de Enero de 2012

---

1. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función.

   a) (1 punto) Escriba la definición de derivada de f en $x_0 \in A \cap A'$.

   Solución. $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}$

   b) (3 puntos) Si f es derivable en x_0 y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, demuestre usando la definición de derivada que

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{f(x)f(x_0)} \\ &= -\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} = -f'(x_0) \cdot \frac{1}{f(x_0)^2}\end{aligned}$$

2. Calcule la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ en cada caso.

   a) (2 puntos) $\quad y = \dfrac{x^3 - 1}{|x - 1|}$

   Solución. Como $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ tenemos que $f(x) = -x^2 - x - 1$ para $x < 0$ y $f(x) = x^2 + x + 1$ para $x > 0$. De esta definición obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -2x - 1 & x < 1 \\ 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

   b) (2 puntos) $\quad y = \left[\cos(x^2 - 1)\right]^{\ln x}$

   Solución. Tomando logaritmo natural vemos que $\ln y = \ln x \cdot \ln[\cos(x^2 - 1)]$ y derivando obtenemos

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln[\cos(x^2 - 1)]}{x} + \ln x \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{\cos(x^2 - 1)} \cdot 2x$$

   de donde

$$\frac{dy}{dx} = [\cos(x^2 - 1)]^{\ln x} \left[\frac{\ln[\cos(x^2 - 1)]}{x} + 2x \ln x \cdot \tan(x^2 - 1)\right]$$

   c) (2 puntos) $\quad y = \dfrac{x - e^y}{x + e^y}$.

   Solución. De la ecuación obtenemos $xy + ye^y = x - e^y$. Derivando implícitamente vemos que

$$y + xy' + y'e^y ye^y y' = 1 - y'e^y$$

   de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y}{x + 2e^y + ye^y}$$

3. (3 puntos) Sea $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x} + 4ax & 0 < x < 1 \\ 2bx^2 + ax & 1 \leq x \end{cases}$$

donde a, b son constantes. Halle los valores de a y b si f es derivable en $x = 1$.

Solución. Como f es derivable, en particular es continua. Calculamos entonces

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3\sqrt{x} + 4ax = 3 + 4a$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2bx^2 + ax = 2b + a$$

de donde $3 + 4a = 2b + a$. Calculamos las derivadas laterales

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3\sqrt{h+1} + 4a(h+1) - 3 - 4a}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{3\sqrt{h+1} - 3}{h} + \frac{4ah}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3}{h} \frac{h}{\sqrt{h+1} + 1} + 4a = \frac{3}{2} + 4a \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2b(h+1)^2 + a(h+1) - 2b - a}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{2bh^2 + 4bh + ah}{h} = 4b + a \end{aligned}$$

de donde obtenemos $\frac{3}{2} + 4a = 4b + a$. Las dos ecuaciones encontradas nos dan $a = -\frac{3}{2}$ y $b = -\frac{3}{4}$.

4. (3 puntos) Sea $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(2x + 1)$. Determine una fórmula para $f^{(n)}(x)$.

Solución. De los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2x+1} \\ f''(x) &= \frac{-1}{(2x+1)^2} 2^2 \\ f'''(x) &= \frac{1}{(2x+1)^3} 2^3 (2) \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-1}{(2x+1)^4} 2^4 (2)(3) \end{aligned}$$

obtenemos la fórmula general

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 2^n (n-1)!}{(2x+1)^n}$$

5. El P.B.I. de un país en millones de dólares es aproximado por la función

$$Q(L) = L^2 + \ln(L + 1)$$

donde L es la fuerza laboral en miles de trabajadores. La fuerza laboral a su vez es aproximada por

$$L(t) = \frac{15t + 5}{t + 1}$$

donde t mide el número de años a partir del 2012.

a) (1 punto) Encuentre la razón de cambio relativo del P.B.I. con respecto a la fuerza laboral.

Solución.

$$\frac{dQ}{dL} = 2L + \frac{1}{L+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q'}{Q} = \frac{2L + \frac{1}{L+1}}{L^2 + \ln(L+1)}$$

b) (1 punto) Calcule la razón de cambio relativo de la fuerza laboral con respecto del tiempo.
Solución.
$$\frac{dL}{dt} = \frac{15(t+1) - (15t+5)}{(t+1)^2} = \frac{10}{(t+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L'}{L} = \frac{10}{(t+1)(15t+5)}$$

c) (2 puntos) ¿Cuál es la razón de cambio porcentual del P.B.I. con respecto del tiempo en el 2016?
Solución. En el 2016 $t = 4$ y esto implica que $L(4) = 13$. Entonces
$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{dQ}{dt}}{Q} = \frac{\frac{dQ}{dL} \cdot \frac{dL}{dt}}{Q} = \frac{2L + \frac{1}{L+1}}{L^2 + \ln(L+1)} \cdot \frac{10}{(t+1)^2}$$
y reemplazando obtenemos
$$\frac{Q'}{Q} \cdot 100\,\% = \frac{7300}{7(169 + \ln 14)}\,\% \approx 6\,\%$$

Curso: Matemáticas II

Calificada 3

Viernes 3 de Febrero de 2012

---

1. *a*) (1 punto) Enuncie bajo qué condiciones es $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable.

   Solución. f es integrable si el límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe donde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ y $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_n, x_{n+1}]$ es una partición del intervalo $[a, b]$.

   b) (2 puntos) Usando la definición demuestre que cualquier función constante es integrable en $[a, b]$.

   Solución. En este caso $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum\limits_{k=1}^{n} C\Delta x = C(b-a)$ lo cual implica que S_n es una sucesión constante. Como toda sucesión constante es convergente, el límite existe.

2. Calcule

   a) (2 puntos) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(3x)} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{sen(3x)} \cos(3x) 3}{1} = 3$

   b) (2 puntos) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x-1)\sqrt{x+1}\, dx = \int_{0}^{2} (u-2)u^{\frac{1}{2}}\, du = -\frac{16\sqrt{2}}{15}$

   c) (3 puntos) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{du}{u^3 - u^2} = \int \frac{du}{u^2(u-1)} = \int \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u-1}\right) du$

   donde $u = \operatorname{sen} x$. Haciendo $1 = Au(u-1) + B(u-1) + Cu^2$ obtenemos $A = -1$, $B = -1$, $C = 1$. Entonces

   $$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{du}{u^3 - u} = \int \left(-\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u-1}\right) du = -\ln|u| + \frac{1}{u} + \ln|u-1| + C$$

   lo cual implica

   $$I = -\ln|\operatorname{sen} x| + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \ln|\operatorname{sen} x - 1| + C$$

3. (3 puntos) Calcule

   $$I = \int e^{kx} \cos x\, dx$$

   donde k es una constante.

   Solución. Primero hacemos $u = e^{kx}$ y $dv = \cos x dx$ lo cual implica que $du = ke^{kx}dx$ y $v = \operatorname{sen} x$, entonces

   $$I = \operatorname{sen} x e^{kx} - \int ke^{kx} \operatorname{sen} x\, dx$$

   El siguiente paso es aplicar integración por partes haciendo $u = e^{kx}$, $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, $du = ke^{kx}dx$, $v = -\cos x$ y por ello

   $$I = \operatorname{sen} x e^{kx} - k\left(-\cos x e^{kx} + \int ke^{kx} \cos x\, dx\right) = \operatorname{sen} x e^{kx} + k\cos x e^{kx} - k^2 \int e^{kx} \cos x\, dx$$

   de donde

   $$I(1+k^2) = e^{ks}(\operatorname{sen} x + k\cos x) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{e^{kx}}{1+k^2}(\operatorname{sen} + k\cos x) + C$$

4. Determine si el enunciado es verdadero o falso, justifique debidamente

a) (1 punto) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x} = (\ln|x|)_{-2}^{2} = 0$

Solución. Falso, el Teorema Fundamental del Cálculo no se aplica porque $y = \frac{1}{x}$ no es continua en cero.

b) (1 punto) Es posible encontrar una solución de $(t-1)\dfrac{dy}{dt} + y = t$ para la cual $y(1) = 0$.

Solución. Falso, si existiera $0 \cdot \frac{dy}{dt} + 0 = 1$ implica $0 = 1$ lo cual es una contradicción y por ello no existe una solución.

c) (1 punto) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{kx}dx = ke^{k} - ke^{-k}$, donde k es una constante.

Solución. Falso,

$$\int_{-1}^{1} e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx}|_{-1}^{1} = \frac{1}{k}(e^{k} - e^{-k})$$

d) La función de costos de una empresa está dada por la función $C\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ donde $C(x)$ representa el costo de producir x miles de unidades en millones de soles. Se sabe que el costo de producir mil unidades son dos millones de soles y el costo de producir dos mil unidades es $2\sqrt{2}$ millones de soles. Si el costo promedio en millones de soles por miles de unidades es proporcional al costo marginal,

1) (3 puntos) Calcule explícitamente la función de costos.
Solución. Del enunciado vemos que

$$\frac{C(x)}{x} = kC'(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{C} = \frac{1}{k}\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|C| = \frac{1}{k}\ln|x| + B \quad \Rightarrow \quad C(x) = Ax^{\frac{1}{k}}$$

Del enunciado se sigue que $C(1) = 2 = A \cdot 1^{\frac{1}{k}}$ lo cual implica $A = 2$. El enunciado también nos dice que $C(2) = 2\sqrt{2} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{k}}$, y esto implica que $k = \frac{1}{2}$. Todo esto nos dice que $C(x) = 2\sqrt{x}$.

2) (1 punto) Cuando la producción aumenta indefinidamente, ¿Qué ocurre con el costo?

Solución. $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$. El costo aumenta y diverge a infinito.

Curso: Matemáticas II

Calificada 4

Viernes 10 de Febrero de 2012

---

1. *a*) (1 punto) Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ escriba la definición de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en el punto (x_0, y_0) usando límites.

   Solución. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$

   b) (2 puntos) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(e^2, 2)$ usando la definición anterior si $f(x, y) = y^2 \ln x - 2y$.

   Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(e^2, 2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(e^2, 2+h) - f(e^2, 2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 \ln e^2 - 2(2+h) - 2^2 \ln e^2 + 2(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \to 0} 2h + 6 = 6
\end{aligned}$$

2. Calcule

   a) (1 puntos) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy} + \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}\right) = ye^{xy} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2y}{x^3}$

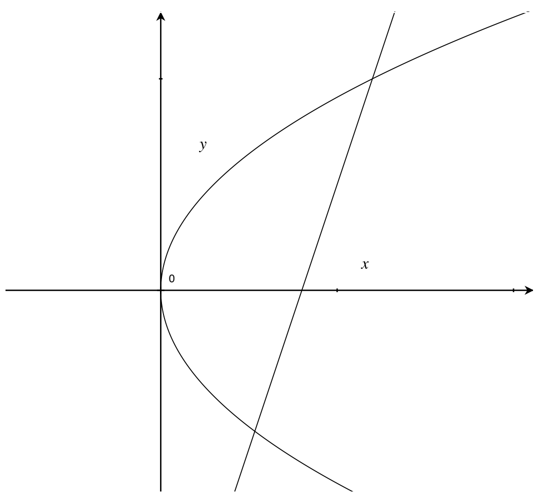
   b) (2 puntos) $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{-1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2}\int_h^1 u^{-\frac{1}{2}} du = \lim_{h \to 0^+} u^{\frac{1}{2}}\Big|_h^1 = 1$

   c) (3 puntos) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x-1)} dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Bigg|_3^{+\infty} = \lim_{h \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right) - \ln\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

3. (3 puntos) Encuentre el área encerrada por la parábola $x = y^2$ y la recta $2x - y = 1$ como se muestra en la figura.

   Solución. De la figura podemos observar que debemos encontrar primero los puntos de intersección. Si $y^2 = \frac{y+1}{2}$ entonces $2y^2 - y - 1 = (2y+1)(y-1) = 0$ lo cual nos dice que las raíces son $-1/2$ y 1. Hay dos formas de calcular el área: integrando respecto de x e integrando respecto de y. Eligiendo la segunda opción tenemos:



$$A = \int_{-1/2}^{1} \left(\frac{y+1}{2} - y^2\right) dy = \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} - \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1/2}^{1}$$

de donde

$$A = \frac{9}{16}$$

4. Determine la verdad o falsedad de de los siguientes enunciados y justifique debidamente.

   a) (1 punto) El Teorema del Valor Medio para integrales nos dice que $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx = 2c^2$ para algún $c \in [1,3]$.

   Solución. VERDADERO. El TVM para integrales nos dice que

   $$\frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2\,dx = c^2$$

   para algún $c \in [1,3]$ de donde se sigue el enunciado.

   b) (1 punto) Si $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ existe para todo $c > 0$ entonces $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

   Solución. FALSO. Si $f(x) = 1$ entonces $\int_0^c dx = c$ existe para todo c pero $\lim\limits_{c\to+\infty} c = +\infty$ y entonces la integral impropia diverge.

   c) (1 punto) Si $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$ entonces la curva de nivel $N_f(2)$ es un círculo.

   Solución. FALSO. Si $x^2 + y^2 + 3 = 2$ entonces $x^2 + y^2 = -1$ es imposible. Esto implica que la curva de nivel $N_f(2)$ es el conjunto vacío.

   d) (1 punto) Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables entonces el gráfico de f y sus curvas de nivel son subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

   Solución. FALSO. Si bien esto es cierto para el gráfico de f, esto no lo es para las curvas de nivel ya que estas son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

5. La suma total de dinero que los consumidores están dispuestos a pagar por q unidades de un producto es $C(q) = 2q + e^{-q} + 10$ (también llamada disposición TOTAL a gastar). La suma total de dinero que los productores están dispuestos a cobrar por q unidades del mismo producto es $P(q) = q - e^{-q} + 2$.

   a) (1 punto) Calcule la ecuación de la oferta y la demanda.

   Solución. La curva de la demanda está dada por la ecuación $D(q) = C'(q) = 2 - e^{-q}$ y la de la oferta por $S(q) = P'(q) = 1 + e^{-q}$.

   b) (1 punto) Calcule el punto de equilibrio.

   Solución. Para que (q,p) sea un punto de equilibrio hacemos $2 - e^{-q} = 1 + e^{-q}$ de donde $q = \ln 2$ y $p = 3/2$.

   c) (2 puntos) Determine el excedente del consumidor y del productor.

   Solución. Conociendo el punto de equilibrio calculamos

   $$\text{E.C.} = C(q)\big|_0^{\ln 2} - p_0q_0 = \ln 4 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

   y

   $$\text{E.P.} = p_0q_0 - P(q)\big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{2}\ln 2 - \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

Curso: Matemáticas II

Examen Parcial

Sábado 28 de Enero de 2012

---

1. *a*) (1 punto) Escriba la definición formal de $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

   Solución. $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$

   b) (1 punto) Calcule el límite de la sucesión descrita por $a_n = \dfrac{4n+1}{5n+2}$.

   Solución. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{4+\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = \dfrac{4}{5}$

   c) (2 puntos) Usando la definición en *a*) encuentre a partir de qué índice n_0 el valor absoluto de la diferencia entre a_n y el límite encontrado en *b*) es siempre menor a $1/100$.

   Solución. Necesitamos que $\left|\dfrac{4n+1}{5n+2} - \dfrac{4}{5}\right| < \dfrac{1}{100}$. Esta ecuación es equivalente a

$$\left|\frac{-3}{5(5n+2)}\right| < \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 60 < 5n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n > 11{,}6$$

   entonces podemos tomar $n_0 = 12$. (De hecho se puede tomar $n_0 = 11$ porque n es un número natural)

2. *a*) (2 puntos) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable donde I es un intervalo. Demuestre que si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es estrictamente decreciente.

   Solución. Asumiendo $x_1 < x_2$ podemos aplicar el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[x_1, x_2]$ lo cual nos garantiza la existencia de un punto $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0.$$

   Pero $x_2 > x_1$ implica que $x_2 - x_1 > 0$ entonces para que la fracción sea negativa es necesario que el numerador sea negativo, es decir $f(x_2) - f(x_1) < 0$ o $f(x_2) < f(x_1)$.

   b) (1 punto) Analice la monotonicidad de la función $f :]-2,-1[\to \mathbb{R}$ dada implícitamente por la ecuación $y + y^3 + e^{-x^2} = 0$ donde $y = f(x)$.

   Solución. Derivando la ecuación implícitamente obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{-x^2}}{1+3y^2}.$$

   Todos los factores en esta fracción son positivos excepto por x el cual es negativo ya que la función está definida en $[-2,-1]$. Entonces la derivada es negativa y por la primera parte esto nos dice que la función es estrictamente decreciente.

3. Calcule

   a) (1 punto) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n^2)}{1+n}$

   Solución. Como $-1 \leq \operatorname{sen}(n^2) \leq 1$ dividiendo por $1+n$ obtenemos

$$-\frac{1}{1+n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n^2)}{1+n} \leq \frac{1}{1+n}$$

   y del teorema del sandwich el límite es cero.

b) (1 punto) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

Solución.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{3\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}} = \frac{2}{3}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}} = \frac{2}{3}$$

c) (1 punto) $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(2x-2)} - e^{\operatorname{sen} 0}}{x-1}$

Solución. De la definición de derivada por medio de límites vemos que este límite es simplemente $f'(1)$ donde $f(x) = e^{\operatorname{sen}(2x-2)}$. Entonces

$$f'(x) = e^{\operatorname{sen}(2x-2)} \cdot \cos(2x-2) \cdot (2) \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 2$$

4. Se tiene una ecuación de la demanda de la forma $p^2q^4 = 10$ donde p es el precio en soles y q las unidades.

   a) (2 punto) ¿Cuál es la variación porcentual aproximada de la demanda ante una caída del precio de 10 a 6 soles?

   Solución. Derivando implícitamente obtenemos

   $$2pq^4 + p^2 4q^3 q' = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 4q^3 q' = -2pq^4 \quad \Rightarrow \quad q' = \frac{dq}{dp} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p}$$

   Pero entonces
   $$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{6-10}{10} = \frac{1}{5}$$

   es decir, la variación porcentual aproximada es de 20 %.

   b) (1 punto) Calcule la elasticidad de la demanda respecto del precio.

   Solución.
   $$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{2}\frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = \eta = -\frac{1}{2}$$

   c) (1 punto) ¿Qué tipo de elasticidad tiene el precio respecto de la demanda?

   Solución. Se tiene que
   $$E_q p = \frac{q}{p}\cdot\frac{dp}{dq} = \frac{1}{E_p q} = \frac{1}{-1/2} = -2$$

   entonces como $|E_q p| = 2 > 1$ el precio es elástico con respecto a la demanda.

5. La utilidad promedio de una pequeña empresa se estima en $(x-1)^3$ miles de soles por unidad donde x es el número de unidades producidas. La capacidad máxima de producción es de dos unidades. Calcule:

   a) (2 puntos) El nivel de producción que resulta en las mayores ganancias y el nivel de producción que resulta en las peores pérdidas.

   Solución. Para $0 \le x \le 2$ tenemos $U(x) = x(x-1)^3$. Entonces

   $$U'(x) = (x-1)^2(4x-1)$$

   de donde obtenemos dos puntos críticos: $1/4$ y 1. Evaluando en estos puntos y en los extremos del dominio de definición obtenemos: $U(0) = 0$, $U(1/4) = -27/256$, $U(1) = 0$, $U(2) = 2$. Entonces en $q = 1/4$ se tienen las peores pérdidas y en $q = 2$ las mayores ganancias.

   b) (1 puntos) El periodo en el cual la utilidad crece.

   Solución. Para que la utilidad crezca se requiere que $U'(x) \ge 0$, es decir

   $$(x-1)^2(4x-1) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \le x \le 2$$

6. (3 puntos) Esboce la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+1=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

c) $f'(x)\leq 0$ para $x\in]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$.

d) $f'(x)>0$ para $x\in]-2,-1[$

e) $f''(x)>0$ para $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]2,+\infty[$

f) $f''(x)<0$ para $]1,2[$

g) $f'(-2)=0$

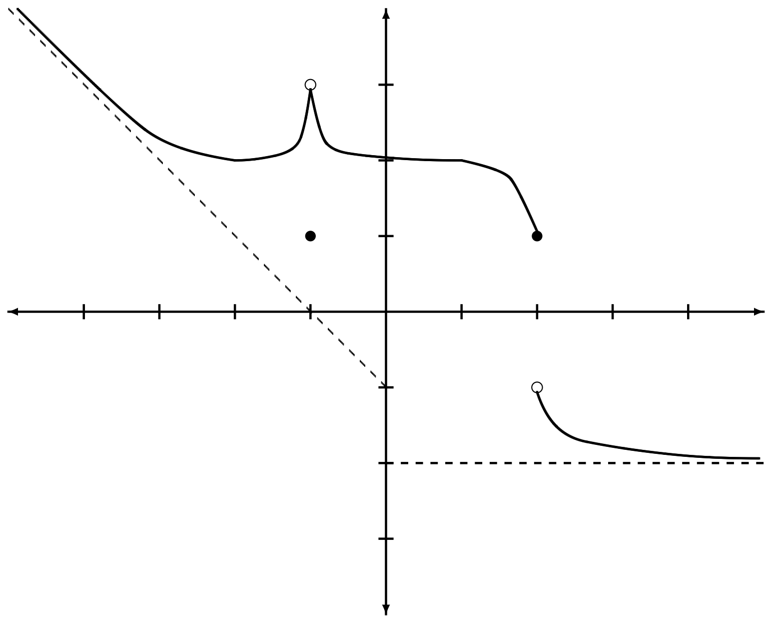
h) $f'(1)=0$

i) $\lim\limits_{x\to-1^-} f'(x)=+\infty$

j) $\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x)=-\infty$

k) Discontinuidad removible en $x=-1$

l) Discontinuidad no removible en $x=2$



UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

Curso: Matemáticas II

EXAMEN FINAL

Lunes 20 de Febrero de 2012

---

1. *a*) (1 punto) Para $f : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la definición completa de función homogénea de grado r.

   b) (1 punto) Sea $f : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado 2 que no es constante con respecto a ninguna de sus variables definida en $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0\}$. Aplique el Teorema de Euler a las derivadas parciales de f.

   c) (2 puntos) Demuestre que $2f = x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}$ para la función f de la parte *b*).

2. *a*) (2 puntos) Calcule la solución de la E.D.O. como función explícita de t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{tx^2 + t}{t + 1} + x^2 + 1$$

   b) (2 puntos) Si $f(x, y) = \dfrac{x^2 y e^{2y}}{1 + y^2} + e^y \ln(x + 1) - y \cos x$ calcule $f_{yyyxyyxyxy}$

3. La función de tres variables $Q = Q(K, L, M)$ representa la producción de un país donde K es el capital, L la mano de obra, y M el nivel de desempleo. Se sabe que el capital y la mano de obra son funciones del desempleo, es decir, $K = K(M)$ y $L = L(M)$.

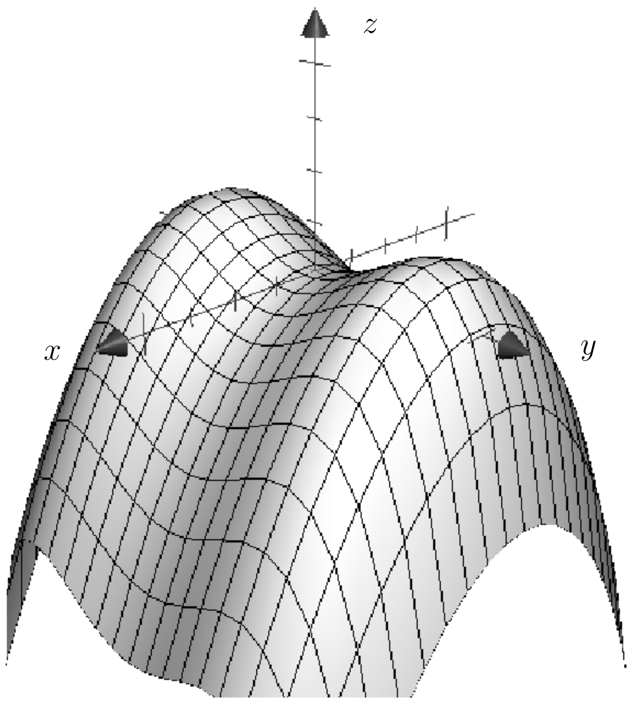
   a) (2 puntos) Aplique la Regla de la Cadena para calcular $\dfrac{dQ}{dM}$.

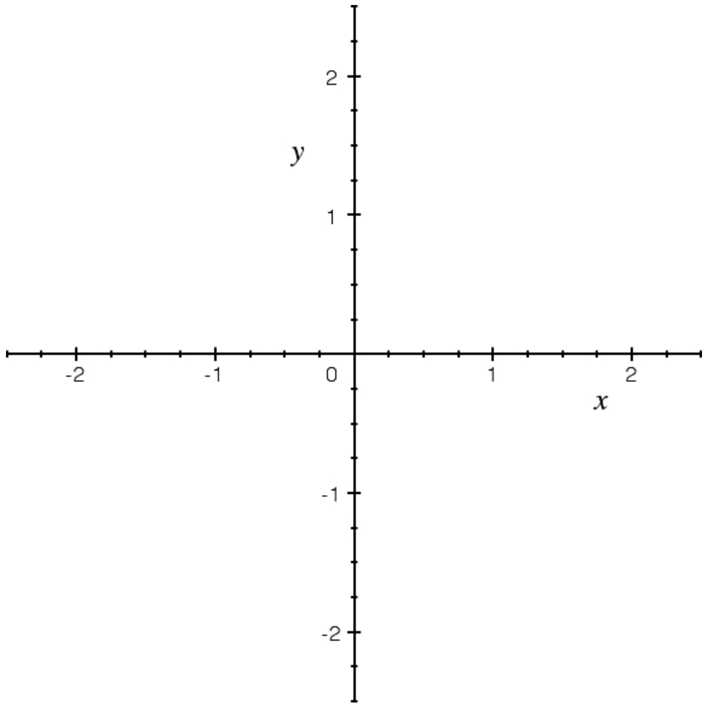
   b) (2 puntos) Se estima que $K(M) = 10 - 2M$ y $L(M) = 12 - 3M$. La r.c.i. de la producción con respecto del capital es igual a $\dfrac{1}{2}$ cuando las otras variables permanecen constantes y la r.c.i. de la producción con respecto de la mano de obra es igual a $\dfrac{1}{3}$ cuando las otras variables permanecen constantes. Calcule $\dfrac{\partial Q}{\partial M}$ bajo estas condiciones si la producción permanece constante. (Sugerencia: use *a*)

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2y^2 - y^4 - x^2$.

   a) (2 puntos) Determine los puntos máximos y mínimos relativos y puntos silla así como los valores de la función en dichos puntos justificando debidamente sus afirmaciones.

   b) (2 puntos) Usando la parte *a*) y el gráfico de f provisto esboce las curvas de nivel de f para los niveles: C= -1, 0 , 1/2 y 1 identificando el nivel de cada curva y los puntos críticos.





5. Si se pueden gastar x miles de soles en mano de obra e y miles de soles en equipamiento, la producción de cierta fábrica será

$$Q(x, y) = 60xy^2$$

unidades. Se tiene un presupuesto de $120,000$ soles

   a) (3 puntos) ¿Cómo debe distribuirse el dinero entre mano de obra y equipamiento para generar la mayor producción posible? Resuelva usando el método de multiplicadores de Lagrange.

   b) (1 punto) Si el presupuesto aumenta en un sol, determine aproximadamente cuántas unidades adicionales se podrán producir. (Sugerencia: puede usar los cálculos en *a*)